Vidensk. Selsk. Skr., 5te Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. 11te Bd. III.

# Fremstilling

af

# Resultaterne af nogle Undersøgelser over de ved Vindens Kraft fremkaldte Strømninger i Havet.

Af

**A. Colding.**

---

Vidensk. Selsk. Skr., 5te Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. 11te Bd. III.

---

**Kjøbenhavn.**

Bianco Lunos Bogtrykkeri.

1876.

Fremstilling

af

# Resultaterne af nogle Undersøgelser over de ved Vindens Kraft fremkaldte Strømninger i Havet.

Af

**A. Colding.**

Vidensk. Selsk. Skr., 5. Række, naturvidensk. og math. Afd. XI. 3.

**Kjøbenhavn.**

Bianco Lunos Bogtrykkeri.

1876.

Lad os begynde med at betragte et meget simpelt Strømningsforhold, og navnlig antage, at der hen over den plane Bund af en Ledning, hvis Fald i Strømmens Retning er $\frac{h}{l}$, strømmer en Vandmasse frem i Retning af Faldet. Lad os derhos forudsætte, at Vandmassen alene paavirkes af Tyngdekraften og af Ledningsmodstanden, at Strømmens Brede er saa stor, at Ledningens Sideflader ingen Indflydelse udøve paa de betragtede Dele af Strømmen, samt at dens Vandspeil flyder parallelt med Bundplanen. I saadant Tilfælde er Vanddybden $H$ constant, ligesom Strømhastigheden for ethvert Element er constant. For denne Strøm, hvis Vandspeil antages at bevæge sig fuldkommen frit, og hvis Dybde antages at være tilstrækkelig stor, gjælder Formlerne (52) i min tidligere Afhandling om Strømforholdene i almindelige Ledninger og i Havet*), hvilke Formler under de gjorte Forudsætninger kunne skrives:

$$v = \boldsymbol{v} - 4{,}8\sqrt{m}\,.\,v_0\,.\left(\frac{x}{H}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{og} \quad g\,.\frac{h}{l} = \frac{m\,.\,v_0^2}{H}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

hvori $\boldsymbol{v}$ betegner Vandstrømmens største Hastighed, Vandspeilshastigheden, medens $v_0$ betegner Bundhastigheden og $v$ Vandets Hastighed i Afstanden $x$ fra det frie Vandspeil; $m$ er Bundens Modstandscoefficient og $(m\,.\,v_0^2)$ fremstiller den Modstand, som Bunden udøver imod Vandets Bevægelse for Eenhed af Overflade.

Af Formlerne (1) følger, som man let seer,

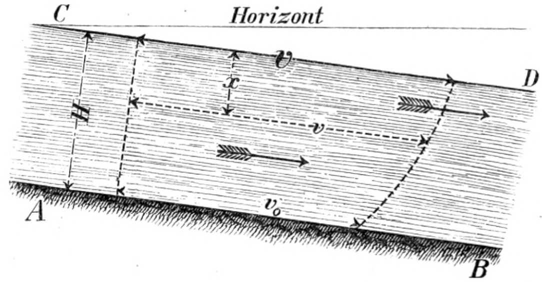
$$v_0 = \sqrt{\frac{g}{m}\,.\,\frac{h}{l}\,H}, \quad \boldsymbol{v} = (1 + 4{,}8\sqrt{m})\,.\,v_0 \quad \text{og} \quad v = \boldsymbol{v} - 26{,}833\sqrt{\frac{h}{l}\,H}\,.\left(\frac{x}{H}\right)^{\frac{3}{2}}$$

hvoraf sees, at Strømningsforholdene i den betragtede Vandstrøm kunne fremstilles ved den omstaaende Figur (1), hvori $AB$ er Ledningens Bund og $CD$ er Strømmens Vandspeil.

---

*) Vidensk. Selskabs Skrifter 5te Række, naturvidensk. og mathematisk Afd. 9. B. III.

*Fig. 1.*

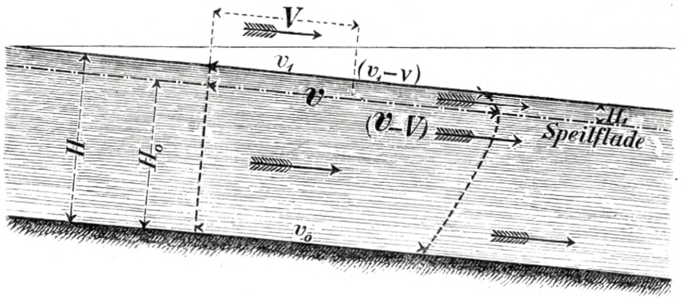



Tænke vi os dernæst Strømmens Overflade begrændset af en med Ledningens Bund parallel Plan eller Dækflade, saa er det indlysende, at hvis denne Dækflade bevæger sig frem i Strømmens Retning med samme Hastighed $\boldsymbol{v}$ som Vandspeilet, med hvilket den er i Berøring, saa vil Dækslet ingen Indflydelse udøve paa Strømforholdene i Ledningen, da det ingen Modstand udøver paa Vanddelenes Bevægelse, eftersom den relative Hastighed mellem Dækslet og Vandet, der berører samme, er Nul. Har Dækplanen derimod en anden Hastighed end Vanddelene af Strømmens Overflade, saa er den relative Hastighed imellem begge ikke Nul, og i saadant Tilfælde bliver selvfølgelig Vandbevægelsen i Ledningen paavirket af Dækslet med en Kraft, som afhænger af den relative Hastighed, hvormed Dækfladen bevæger sig hen over Strømmens Overflade. Strømmens Overfladehastighed bliver da forskjellig fra den fritløbende Strøms Hastighed $\boldsymbol{v}$, og naar vi almindeligt ved $v_1$ betegne Hastigheden af Vandet ved Dækslet, samt ved $V$ betegne Dækfladens Hastighed, saa kan den relative Hastighed mellem Dækslet og Strømmen uden Hensyn til Fortegnet fremstilles ved $(V - v_1)$. Betegne vi dernæst Dækfladens Modstandscoefficient med $m_1$, saa er det klart, at der mellem Dækslet og Vanddelene opstaaer en Modstandskraft, som kan udtrykkes ved $m_1 (V - v_1)^2$, ganske paa samme Maade som Modstandskraften ved Ledningens Bund kan fremstilles ved $m \, . \, v_0^2$. Naar Dækslets Modstandskraft er Nul, saa er altsaa $V = v_1$, og da er som vi have seet Strømmens Overfladehastighed $v_1 = \boldsymbol{v}$.

Er $V$ derimod positiv og mindre end den frie Strøms Overfladehastighed, saa lider Strømmen en Modstand, som er udtrykt ved $m_1 (V - v_1)^2$, og denne Modstand fremkalder naturligviis ganske tilsvarende Forhold ved Strømmens Overflade, som de der fremkaldes ved Ledningens Bund af den derværende Reaction. Som en Følge heraf bliver hele Vandstrømmen, hvis Dybde er $H$, deelt i to selvstændige Strømme, en øvre Strøm, hvis Dybde vi ville kalde $H_1$ og en nedre Strøm, hvis Dybde vi ville betegne med $H_0$, saaledes at $H_0 + H_1 = H$. Af disse to Strømme paavirkes Overstrømmen alene af Dækfladens Modstand, saaledes som jeg tidligere har viist, og enhver af disse Strømme bevæger sig paa sin Flade som en fri og ubedækket Strøm, der har sit Vandspeil i Skillefladen mellem begge Strømme. Denne fælles Vandspeilsflade, hvori Strømhastigheden er større end for noget andet Punkt af de to Strømme, kalder jeg Strømmenes Speilflade, og Hastigheden i denne Flade, hvis Beliggenhed afhænger af $V$, betegner jeg med $\boldsymbol{v}$.

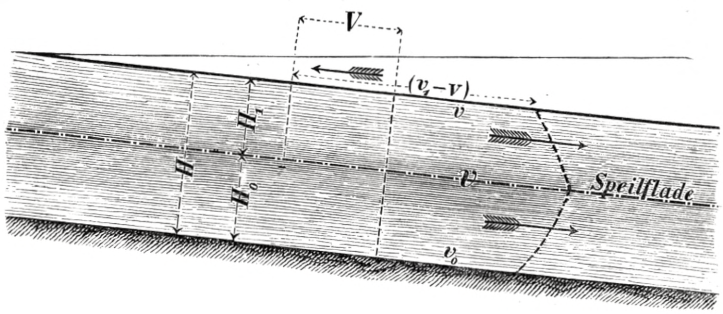
Naar $V = v_1$, saa er Dækfladens Modstand Nul, altsaa Overstrømmens Dybde $H_1 = 0$ og $v_1 = \boldsymbol{v}$; i dette Tilfælde falder Speilfladen altsaa ved Overfladen og danner Vandspeilet, hvori Hastigheden er et Maximum, som antydet i Fig. 1. Formindskes $V$, saa forøges Modstanden ved Overfladen, og Maximumshastigheden $\boldsymbol{v}$ sænker sig under Overfladen til en Dybde $H_1$, der afhænger af $V$, som antydet i Figur 2. Naar altsaa $V$ aftager

*Fig. 2.*




fra $\boldsymbol{v}$ til Nul, saa aftager Overfladehastigheden, medens Dybden $H_1$ tiltager, og tænkes $V$ derefter yderligere at aftage, eller, hvad der er det samme, tænkes $V$ at voxe negativt, saa kan Vandets Overfladehastighed $v_1$ derved bringes til aftage indtil Nul, og for endnu større negative Værdier af $V$ gaae over til at blive negativ, som antydet paa Figurerne 3, 4 og 5. Overstrømmens Dybde vedbliver imidlertid at voxe, og da denne Strøms Hastighed er

*Fig. 3.*




positiv i Dybden $H_1$, maa der til alle de negative Værdier af Overfladehastigheden $v_1$ findes et Punkt i Overstrømmen, hvori Hastigheden er Nul, saaledes som antydet paa omstaaende Figur 5. Afstanden fra Dækslet til dette Punkt voxer med $V$, og jeg skal dertil blot bemærke, at der selvfølgelig gives en Hastighed $V$, for hvilken den hele Strøms Vandføring

*Fig. 4.*

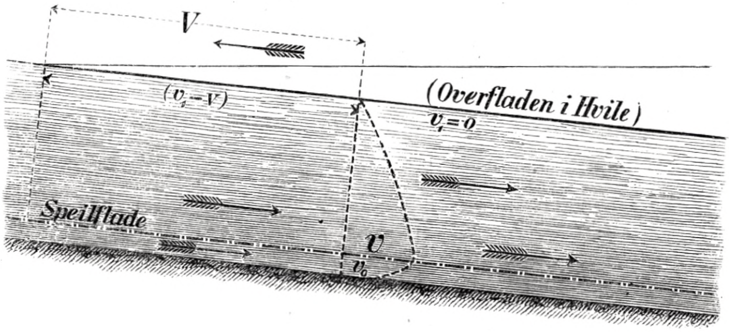
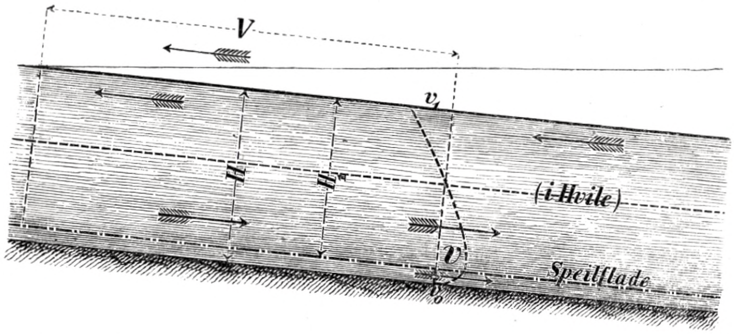
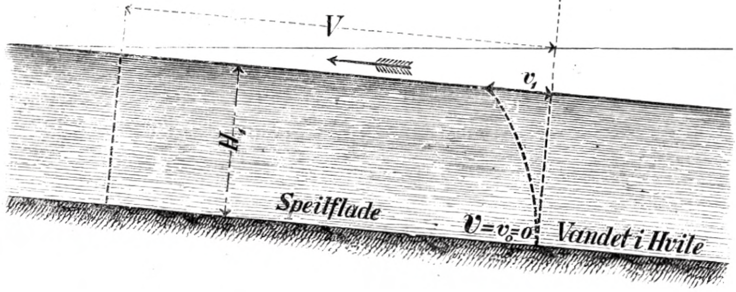



*Fig. 5.*




er Nul, idet Overstrømmen fører den samme Vandmængde tilbage som Understrømmen fører frem. Samtidigt med at Overstrømmens Dybde $H_1$ nærmer sig til $H$, aftager naturligviis Understrømmens Dybde $H_0 = H - H_1$, og for en vis Værdi af $V$ forsvinder aabenbart Understrømmen aldeles, navnlig i det Øjeblik, da den Modstand, som Dækfladen under sin Bevægelse i modsat Retning af Vandspeilsfaldet udøver mod Overfladen af Vandmassen, bliver saa stor, at den drivende Kraft, som derfra meddeles Vandet, er lige saa stor som den drivende Kraft, som hidrører fra Tyngdens Virkning paa hele Vandmassen. Naar dette indtræder, river Dækslet hele Vandmassen med sig, medens denne løber frem paa Dækfladen saaledes, at Vandelene ved Bunden netop forblive i Hvile, som antydet paa Fig. 6.

*Fig. 6.*



I det Øjeblik, hvor Understrømmen forsvinder, falder aabenbart Maximumshastighen $\mathfrak{v}$ i Speilfladen sammen med Bundhastigheden $v_0$, og man har $\mathfrak{v} = v_0 = 0$. Den hele Vandmasse kan da betragtes som en Strøm, der løber paa den med Hastigheden $V$ bevægede Dækflade i Retning af Ledningens Fald, og hvis frie Vandspeil befinder sig ved Ledningens Bund. Da Vandets virkelige Hastighed ved Dækfladen er $v_1$ og ved Bundfladen er Nul, saa er Vandets relative Hastighed med Hensyn til Dækfladen foroven $= \div (V - v_1)$ og forneden $= - V$.

Den hele her beskrevne Gruppe af Strømningsforhold, fra det Tilfælde hvor Vandstrømmen helt og holdent bevæger sig paa Ledningens Bundflade og dens Overflade er fri, til det Tilfælde, hvor Vandmassen udelukkende bevæger sig paa Dækfladen medens Strømmens Vandspeil befinder sig ved Ledningens Bund, sammenfatter jeg som Iste Classe af Strømningsforhold. Til at danne Strømningsforhold henhørende til denne Classe udfordres altsaa, at Dækslet skal bevæge sig med en Hastighed $V$, der ligger mellem Grændser, som afhænge af Ledningens Dybde og Fald, og hvoraf den høiere (positive) Grændse er $V = \mathfrak{v}$, og den lavere (negative) Grændse har en saadan Størrelse, at Strømmens Bundhastighed netop er Nul.

Stiger Dækfladens Hastighed $V$ i negativ Retning ud over den nævnte lavere Grændse, ved hvilken Bundhastigheden er Nul, imod $\div \infty$, saa fremkommer der en ny Gruppe af Vandbevægelser, der passende kan benævnes IIden Classe af Strømningsforhold. Det vil nemlig være klart, at naar Dækslets Hastighed i negativ Retning bliver større end den, ved hvilken Vanddelene ved Bunden af Ledningen ere i Hvile, saa vil Dækslets Bevægelse medføre en forøget Reaction mod Strømmens Overflade, og Følgen deraf vil være, at ogsaa de nederste Dele af Vandmassen rives med af Dækslet i negativ Retning hen over Ledningens Bund. Bundhastigheden, som vi kalde $v_0$, bliver altsaa negativ, og der opstaaer en Reaction ved Bunden, som udtrykt ved $m \,.\, v_0^2$ vil antage en saadan Størrelse, at Strømhastigheden bliver constant for den givne Hastighed $V$ af Dækslet.

Tænke vi os paa den anden Side, at Dækslets Hastighed $V$ voxer positivt (i Retning af Ledningens Fald) ud over den høiere Grændse for den Iste Classe af Strømme, altsaa fra $\mathfrak{v}$ til $+ \infty$, saa opstaaer hvad jeg kalder IIIdie Classe af Strømningsforhold. Tilfælde af denne Art fremkomme altsaa, naar Dækslet bevæger sig i positiv Retning med en Hastighed, der er større end den, hvormed Overfladen af den betragtede Vandmasse vilde bevæge sig, naar Overfladen var fri og Strømmen foruden Tyngdekraften kun paavirkedes af Ledningens Reaction. —

Disse tre Classer af Strømningsforhold omfatte, som man vil see, alle de permanente Strømningsforhold, som kunne fremtræde i en Vandstrøm, som har en constant Dybde og Fald; men det sees tillige let, at om Vandspeilet ikke fuldkommen er parallelt med Bunden, saa vil Strømmens Tværsnitsareal for en Brede $= 1$ kun variere forholdsviis lidt, naar

Strømdybden $H$ er stor. Men naar Strømprofilet kun varierer lidt, saa varierer ogsaa Strømhastigheden kun lidt, og kan denne betragtes som constant langs ad Strømmen, saa ere de foran anførte Formler anvendelige paa disse Strømme.

Naar vi nu efter disse orienterende Bemærkninger ville søge at bestemme Lovene for de omhandlede trende Classer af Vandbevægelser, vil det være nødvendigt at betragte hver Classe af Strømningsforhold for sig, og vi ville derfor begynde med at betragte den Gruppe af Tilfælde, som henhører under den Iste Classe af Strømningsforhold. Lad os altsaa antage, at den betragtede Vandstrøm, hvis Dybde er $H$, paa Grund af Tyngden bevæger sig frem over Bunden af en Ledning, hvis Fald er $\frac{h}{l}$, i Faldets Retning, hvilken vi ville betragte som den positive Retning, og at denne Strøm er paavirket af Ledningsmodstanden ved Strømmens Bund i Forbindelse med den Modstand, som hidrører fra, at Strømmens Overflade er i Berøring med en Dækflade, som bevæger sig i Retning af Ledningens Fald med en Hastighed $V$, som er mindre end Strømmens Overfladehastighed. Lad Vandets Strømningshastighed ved Ledningens Bund være $v_0$ og lad dets Strømhastighed langs den bevægelige Dækflade være $v_1$, samt lad Modstandscoefficienterne for Vandets Bevægelse langs Bund- og Dækfladen være henholdsviis $m$ og $m_1$, som foran omtalt. Den relative Hastighed, hvormed Vandet passerer forbi disse Flader, er altsaa $v_0$ og $(v_1 - V)$, og Modstanden, som Strømmen lider derved, kan følgelig fremstilles ved $m \cdot v_0^2$ og $m_1 (V - v_1)^2$.

Den hele Strøm, hvis Dybde er $H$, deler sig derved som foran angivet i en Understrøm, som løber paa Bundfladen og har Dybden $H_0$, og i en Overstrøm, som har Dybden $H_1 = H - H_0$ og løber paa Dækfladen. Maximumshastigheden for begge disse Strømme, der falder i den fælles Speilflade, være fremstillet ved $\boldsymbol{v}$. Ifølge de almindelige Love, som ere fremstillede i det Foregaaende ved Formlerne (1), er det nu tydeligt, at naar vi betragte Understrømmen, saa kunne Formlerne for Strømbevægelsen fremstilles:

$$v = \boldsymbol{v} - 4{,}8\sqrt{m} \cdot v_0 \left(\frac{x}{H_0}\right)^{\frac{3}{2}} \text{ og } m \cdot v_0^2 = g \cdot \frac{h}{l} \cdot H_0,$$

hvoraf videre følger:

$$v_0 = \sqrt{\frac{g}{m} \cdot \frac{h}{l} H_0} \text{ og } v = \boldsymbol{v} - 26{,}833 \sqrt{\frac{h}{l} \cdot H_0} \cdot \left(\frac{x}{H_0}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \ldots (2)$$

idet $v$ betegner Strømhastigheden i Afstanden $x$ fra Speilfladen. Ifølge de samme almindelige Love vil det fremdeles være klart med Hensyn til Overstrømmen, at de til denne Strøm svarende Formler kunne fremstilles saaledes:

$$(V - v') = (V - \boldsymbol{v}) - 4{,}8\sqrt{m_1}\,(V - v_1) \cdot \left(\frac{x'}{H_1}\right)^{\frac{3}{2}} \text{ og } m_1 (V - v_1)^2 = g \frac{h}{l} \cdot H_1,$$

hvoraf videre følger:

$$(V - v_1) = -\sqrt{\frac{g}{m} \cdot \frac{h}{l} H_1}, \text{ og } v' = \boldsymbol{v} - 26{,}833 \sqrt{\frac{h}{l} H_1} \cdot \left(\frac{x'}{H_1}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \ldots (3)$$

idet $v'$ betegner Strømhastigheden i Afstanden $x'$ fra Speilfladen.

Af Formlerne (2) og (3) følger ved simpel Addition, idet $H_0 + H_1 = H$,

at
$$m \,.\, v_0^2 + m_1 (V - v_1)^2 = g \frac{h}{l} \,.\, H, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

der kun udtrykker, hvad der ogsaa er umiddelbart indlysende, at den hele ved Tyngden fremkaldte drivende Kraft er ligestor med Summen af de Modstande, som Bunden og Dækslet frembyde. De to sidste af Formlerne (2) og (3) vise, hvad man ogsaa umiddelbart kunde indsee, at Strømhastigheden i de omhandlede to Strømme varierer ganske efter samme Lov. Naar vi i de to første af Formlerne (2) og (3) sætte $x = H_0$ og $x' = H_1$, saa bliver $v = v_0$ og $v' = v_1$, og man finder da at

$$\boldsymbol{v} = (1 + 4{,}8 \sqrt{m} \,.\, v_0 \text{ og } (V - \boldsymbol{v}) = (1 + 4{,}8 \sqrt{m_1}) (V - v_1); \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

indsætte vi de heraf følgende Værdier for $v_0$ og $(V - v_1)$ i Formlen (4) erholdes:

$$\left(\frac{\sqrt{m}}{1 + 4{,}8 \sqrt{m}}\right)^2 . \, \boldsymbol{v}^2 + \left(\frac{\sqrt{m_1}}{1 + 4{,}8 \sqrt{m_1}}\right)^2 . \, (V - \boldsymbol{v})^2 = g \,.\, \frac{h}{l} \,.\, H,$$

som multipliceret med $(4{,}8)^2$ giver, idet vi for $g$ sætte 31,25,

$$\left(\frac{4{,}8 \sqrt{m}}{1 + 4{,}8 \sqrt{m}}\right)^2 . \, \boldsymbol{v}^2 + \left(\frac{4{,}8 \sqrt{m_1}}{1 + 4{,}8 \sqrt{m_1}}\right)^2 (V - \boldsymbol{v})^2 = (26{,}833)^2 \,.\, \frac{h}{l} H \quad \ldots \quad (6)$$

Ifølge Ligningerne (5) seer man imidlertid at

$$\left(\frac{4{,}8 \sqrt{m}}{1 + 4{,}8 \sqrt{m}}\right) \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} - v_0 \text{ og } \left(\frac{4{,}8 \sqrt{m_1}}{1 + 4{,}8 \sqrt{m^1}}\right) (V - \boldsymbol{v}) = -(\boldsymbol{v} - v_1),$$

og at Formlen (6), som en Følge heraf, kan fremstilles under følgende Form:

$$(\boldsymbol{v} - v_0)^2 + (\boldsymbol{v} - v_1)^2 = (26{,}833)^2 \,.\, \frac{h}{l} H \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Af Formlerne (2) og (3) findes fremdeles, at

$$\frac{(4{,}8 \sqrt{m} \,.\, v_0)^2}{H_0} = \frac{(4{,}8 \sqrt{m_1} (V - v_1))^2}{H_1}$$

og da dernæst ifølge Formlen (5)

$$(\boldsymbol{v} - v_0) = 4{,}8 \sqrt{m} \,.\, v_0 \text{ og } (\boldsymbol{v} - v_1) = -4{,}8 \sqrt{m_1} (V - v_1), \text{ saa er}$$

$$\left(\frac{\boldsymbol{v} - v_1}{\boldsymbol{v} - v_0}\right)^2 = \frac{H_1}{H_0}, \quad \frac{(\boldsymbol{v} - v_0)^2 + (\boldsymbol{v} - v_1)^2}{(\boldsymbol{v} - v_0)^2} = \frac{H}{H_0} \text{ og } \frac{(\boldsymbol{v} - v_0)^2 + (\boldsymbol{v} - v_1)^2}{(\boldsymbol{v} - v_1)^2} = \frac{H}{H_1}, \quad \ldots \quad (8)$$

hvoraf
$$H_0 = \frac{(\boldsymbol{v} - v_0)^2}{(\boldsymbol{v} - v_0)^2 + (\boldsymbol{v} - v_1)^2} \,.\, H \text{ og } H_1 = \frac{(\boldsymbol{v} - v_1)^2}{(\boldsymbol{v} - v_0)^2 + (\boldsymbol{v} - v_1)^2} \,.\, H.$$

Naar disse Værdier for $H_0$ og $H_1$ indsættes i den anden af Ligningerne (2) og (3), findes:

$$m \,.\, v_0^2 = \frac{(\boldsymbol{v} - v_0)^2}{(\boldsymbol{v} - v_0)^2 + (\boldsymbol{v} - v_1)^2} g \frac{h}{l} H \text{ og } m_1 (V - v_1)^2 = \frac{(\boldsymbol{v} - v_1)^2}{(\boldsymbol{v} - v_0)^2 + (\boldsymbol{v} - v_1)^2} g \frac{h}{l} H. \quad \ldots \quad (9)$$

Betragte vi nu Vandføringen af den omhandlede Strøm for en Brede $= 1$, og sætte vi Understrømmens Vandføring lig $q_0$ og Overstrømmens Vandføring lig $q_1$, saa findes:

$$q_0 = \int_0^{H_0} v \,.\, dx = \int_0^{H_0} \left( \boldsymbol{v} - 4{,}8 \sqrt{m} \,.\, v_0 \left( \frac{x}{H_0} \right)^{\frac{3}{2}} \right) dx = \boldsymbol{v} \,.\, H_0 - \tfrac{2}{5} \,.\, 4{,}8 \sqrt{m} \,.\, v_0 \,.\, H_0$$

$$\text{og } q_1 = \int_0^{H_1} v' \,.\, dx' = \int_0^{H_0} \left( \boldsymbol{v} + 4{,}8 \sqrt{m_1} \,(V - v_1) \left( \frac{x'}{H_1} \right)^{\frac{3}{2}} \right) dx' = \boldsymbol{v} \,.\, H_1 + \tfrac{2}{5}\, 4{,}8 \sqrt{m_1} \,(V - v_1) \,.\, H_1 ;$$

men da vi imidlertid, som ovenfor angivet, have

$$4{,}8 \sqrt{m} \,.\, v_0 = \boldsymbol{v} - v_0 \text{ og } 4{,}8 \sqrt{m_1} \,(V - v_1) = -(\boldsymbol{v} - v_1),$$

saa kunne de omhandlede Vandføringer af Under- og Overstrømmen skrives:

$$q_0 = \boldsymbol{v} \,.\, H_0 - \tfrac{2}{5} (\boldsymbol{v} - v_0) \,.\, H_0 \text{ og } q_1 = \boldsymbol{v} \,.\, H_1 - \tfrac{2}{5} (\boldsymbol{v} - v_1) \,.\, H_1 .$$

Betegne vi dernæst Middelhastigheden af den hele omhandlede Strøm ved $w$, saa kan Vandføringen af hele Strømmen for Eenhed af Brede sættes lig $w \,.\, H$; vi have da

$$q_0 + q_1 = w \,.\, H,$$

og naar vi heri for $q_0$ og $q_1$ indsætte de ovenanførte Værdier, findes:

$$w = \boldsymbol{v} - \tfrac{2}{5} \left[ (\boldsymbol{v} - v_0) \frac{H_0}{H} + (\boldsymbol{v} - v_1) \frac{H_1}{H} \right];$$

naar dernæst Værdierne for $\frac{H_0}{H}$ og $\frac{H_1}{H}$ indsættes ifølge Formlerne (8), findes

$$\boldsymbol{v} - w = \tfrac{2}{5} \frac{(\boldsymbol{v} - v_0)^3 + (\boldsymbol{v} - v_1)^3}{(\boldsymbol{v} - v_0)^2 + (\boldsymbol{v} - v_1)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Af den første Formel (2), som fremstiller det almindelige Udtryk for Strømhastigheden $v$ i Understrømmen, sees, at i hele denne Strøm er Hastigheden beliggende mellem Grændserne $\boldsymbol{v}$ og $v_0$, der begge have samme Tegn, eftersom de afhænge af hinanden efter følgende Lov: $\boldsymbol{v} = (1 + 4{,}8 \sqrt{m}) v_0$, og alle Elementer af Understrømmen bevæge sig altsaa i den betragtede Klasse af Tilfælde i Retning af Vandspeilsfaldet, som vi betragte som den positive Retning. For Overstrømmen stiller Forholdet sig ligedan, ifølge den første Formel (3), saalænge Overfladehastigheden $v_1$ og $\boldsymbol{v}$ have samme Tegn, altsaa begge ere positive; men naar Dækslet bevæges i negativ Retning (imod Faldet) med en Hastighed ($V$), der er saa stor, at Dækslet river Delene af Strømmens Overflade med sig i negativ Retning, da bliver Tilfældet et andet. Naar nemlig $v_1$ er negativ og $\boldsymbol{v}$ er positiv, altsaa naar de Dele af Overstrømmen, som ligge nærmest ved Dækfladen, have en negativ Hastighed og de dybest liggende Dele af Overfladestrømmen have en positiv Hastighed, saa maa der selvfølgelig findes et Element af denne Strøm, hvori Strømhastigheden er Nul, og den Afstand fra den nederste frie Overflade, hvori dette er Tilfælde, kan let bestemmes af den første Ligning (3). Af denne Ligning, som kan skrives:

$$v' = \boldsymbol{v} + 4{,}8\sqrt{m_1}\,(V - v_1)\,.\left(\frac{x'}{H_1}\right)^{\frac{3}{2}}$$

følger nemlig, idet vi sætte $v' = 0$, at den søgte Afstand $x'$ kan fremstilles:

$$x' = \left(\frac{\boldsymbol{v}}{4{,}8\sqrt{m_1}\,(v_1 - V)}\right)^{\frac{2}{3}}.\,H_1\,,$$

og Afstanden $(H_1 - x')$ fra Dækslet til det Strømelement, som er i Hvile, kan følgelig fremstilles ved

$$y = \left[1 - \left(\frac{\boldsymbol{v}}{4{,}8\sqrt{m_1}\,(v_1 - V)}\right)^{\frac{2}{3}}\right].\,H_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Den mindste negative Hastighed af Dækslet $(V)$, hvorved en saadan Hviletilstand fremkommer, er naturligviis den, hvorved Strømelementerne nærmest Dækfladen bringes i Hvile; naar dette finder Sted, saa er $y = 0$ og $v_1 = 0$, og Betingelsen herfor findes ifølge (11) at være den, at Dækfladen skal bevæge sig med Hastigheden

$$V = -\frac{\boldsymbol{v}}{4{,}8\,.\sqrt{m_1}}\,.$$

Naar Dækslet bevæger sig med denne Hastighed, vil altsaa Vandmassens Overflade være i Hvile; men forøges Dækslets Hastighed i samme Retning (negativt), saa sænker det hvilende Strømelement sig ned under Overfladen, og desto dybere jo større $V$ bliver, indtil det naaer sin Dybdegrændse ved Vandmassens Bund i det Øieblik, hvor Understrømmen forsvinder og altsaa $H_0 = 0$, $\boldsymbol{v} = v_0 = 0$ og $H_1 = H$.

Naar Dækfladen har den hertil fornødne Hastighed, saa sees det af Formlen (7) at

$$v_1 = -26{,}833\,.\sqrt{\frac{h}{l}\,H}\,,$$

og af denne Værdi for $v_1$ findes derefter, ifølge den sidste af Formlerne (9), at Dækfladen maa bevæge sig med Hastigheden:

$$V = -26{,}833\,\frac{1 + 4{,}8\sqrt{m_1}}{4{,}8\sqrt{m_1}}\,.\sqrt{\frac{h}{l}\,H} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Gaae vi til den anden Grændse for Strømningsforholdene af Iste Klasse, idet vi antage, at Dækfladen har sin største positive Værdi: $V = v_1 = \boldsymbol{v}$, saa finde vi ifølge Formlen (7) at

$$\boldsymbol{v} - v_0 = 26{,}833\,.\sqrt{\frac{h}{l}\,H}\,,$$

og idet vi dernæst bemærke, at af Formlerne (9) er den sidste identisk, medens den første giver $v_0 = \frac{26{,}833}{4{,}8\sqrt{m}} \cdot \sqrt{\frac{h}{l} H}$, saa finde vi Dækfladens Hastighed:

$$V = 26{,}833 \frac{1 + 4{,}8\sqrt{m}}{4{,}8\sqrt{m}} \cdot \sqrt{\frac{h}{l} H} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

Efter saaledes at have fremstillet de almindelige Love for Strømforholdene af Iste Classe samt ved Formlerne (12) og (13) at have bestemt Grændserne for Dækfladens Hastighed svarende til denne Classe af Tilfælde, vil jeg nu paa lignende Maade søge at fremstille de Formler, som gjælde for IIden Classe af Strømningsforhold, der svarer til Hastigheder af Dækslet, som ere negativt større end den ved Formlen (12) bestemte Hastighed $V$.

Bevæger Dækfladen sig i negativ Retning med en Hastighed $V$, der er større end den ved Formlen (12) bestemte Grændse, saa rives derved samtlige Dele af den hele Vandmasse med i negativ Retning, fordi den fra Dækfladen udgaaende drivende Kraft: $m_1 (V - v_1)^2$ da har en saadan Størrelse, at den ikke blot fuldstændigt overvinder den fra Tyngden hidrørende drivende Kraft $g \frac{h}{l} . H$, men desuden er istand til at overvinde den fra Ledningens Bundfriction hidrørende Modstandskraft $m . v_0^2$, som fremkommer ved at de nedre Dele af Vandmassen drives hen over Ledningens Bund med Hastigheden $v_0$. Under disse Forhold, hvor altsaa Vandmassen drives frem imod Vandspeilsfaldet med en bevægende Kraft $= m_1 (V - v_1)^2$, imedens denne Bevægelse modvirkes paa Grund af Tyngden af den bevægende Kraft $= g \frac{h}{l} . H$ i Forening med den fra Ledningsmodstanden hidrørende Kraft $m . v_0^2$, og hvor den derved fremkaldte Strømningshastighed er constant, haves

$$m_1 (V - v_1)^2 = g \frac{h}{l} H + m . v_0^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

Men ligesom vi her see, at den drivende Kraft, som hidrører fra Dækslets Reaction mod de øverste Strømelementer, har en saadan Størrelse, at den foruden at overvinde Tyngdens Virkning paa alle de underliggende Strømelementer, tillige kan overvinde Ledningsmodstanden $(m . v_0^2)$, saaledes maa ogsaa for et hvilketsomhelst andet Strømelement den drivende Kraft, som hidrører fra Dækfladens Bevægelse, være saa stor, at den foruden at overvinde Tyngdens Virkning paa hele den underliggende Deel af Strømmen desuden kan overvinde den angivne Ledningsmodstand $(m . v_0^2)$. — Den Kraft, som modvirker Bevægelsen af et hvilketsomhelst Strømelement, er altsaa, foruden Tyngdekraftens Virkning paa hele den underliggende Vandmasse, bestandig den samme Størrelse, nemlig: Ledningsmodstanden $(m . v_0^2)$; og deraf vil det være indlysende, at om vi tænke os den givne Vanddybde $H$ saaledes forøget, at den tilføiede Vandmasse paa Grund af Tyngden netop vil modvirke

Bevægelsen paa samme Maade, som det i Virkeligheden skeer ved Bundfrictionen, saa ville Strømforholdene i den givne Strøm ikke derved forandres.

Betegne vi da ved $D$ den hele Dybde, som Strømmen maatte have for at Strømforholdene i dens øverste Deel, indtil Dybden $H$, skulde nøiagtig blive de samme i denne Strøm, — der ikke tænkes paavirket af nogen Bundfriction, men alene paavirkes af Tyngdekraften —, som i den foreliggende Strøm, hvis Dybde er $H$, og som paavirkes baade af Tyngden og af Ledningsmodstanden i Forening, saa maa $D$ naturligviis tilfredsstille Ligningen:

$$m_1 \,.\, (V - v_1)^2 = g \frac{h}{l} H + m \,.\, v_0^2 = g \frac{h}{l} \,.\, D \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Idet vi dernæst efter det Ovenanførte fastholde, at Reactionen, som udgaaer fra Dækfladen, hvorpaa den betragtede Strøm glider, voxer proportionalt med det betragtede Strømelements Afstand fra Strømmens Speilflade, ganske som i en Vandstrøm, der løber paa en plan Flade, saa bliver det indlysende, at Vandet i den tænkte Strøm, hvis Dybde er $D$, maa bevæge sig med Hensyn til Dækfladen paa samme Maade, som Vandet i en Strøm af samme Dybde og Vandspeilsfald vilde bevæge sig ovenpaa Dækfladen, naar denne var stillestaaende.

Betegne vi da Hastigheden af den tænkte Strøms nederste Elementer ved $\boldsymbol{v}$, saa bliver Hastigheden, hvormed den frie Overflade (Bundelementerne af Strømmen) bevæger sig i Forhold til Dækfladen, fremstillet ved $(V - \boldsymbol{v})$; betegnes dernæst Overfladehastigheden af Vandmassen eller de Dele af denne, som ligge Dækslet nærmest ved $v_1$, saa er disse Deles relative Hastighed imod Dækfladen altsaa fremstillet ved $(V - v_1)$; og betegne vi endelig ved $v$ Strømhastigheden i en vilkaarlig Afstand $x$ fra den fri Niveauflade, som ligger i Dybden $D$ under Dækfladen, saa er $(V - v)$ Vandets relative Hastighed i dette Punkt af Strømmen. Ligningen for Vandets Bevægelse paa Dækfladen kan da ifølge Formlen (1) fremstilles saaledes:

$$(V - v) = (V - \boldsymbol{v}) - 4{,}8 \sqrt{m_1}\, (V - v_1) \left(\frac{x}{D}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Da $x$ betegner Afstanden fra det nederste Punkt af den tænkte Strøm til det vilkaarlige Strømelement, hvis Hastighed er $v$, saa er det klart at dersom vi i denne Ligning sætte $x = D$, saa svarer dertil $v = v_1$; naar disse sammenhørende Værdier for $x$ og $v$ indsættes i Formlen (16) erholdes:

$$(V - \boldsymbol{v}) = (1 + 4{,}8 \sqrt{m_1})\, (V - v_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Da dernæst Strømhastigheden i Dybden $H$ under Overfladen af den betragtede Strøm skal være $v_0$, ligesom i den givne Strøm, saa skal der altsaa til $x = D - H$ svare $v = v_0$, og naar disse sammenhørende Værdier af $x$ og $v$ indsættes i Formlen (16) erholdes:

$$(V - v_0) = (V - \boldsymbol{v}) - 4{,}8 \sqrt{m_1}\, (V - v_1) \,.\, \left(\frac{D - H}{D}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Af Formlerne (17) og (18), der kunne skrives:

$(\boldsymbol{v}-v_1) = -4{,}8\sqrt{m_1}\,(V-v_1)$ og $(\boldsymbol{v}-v_0) = -4{,}8\sqrt{m_1}\,(V-v_1)\left(\frac{D-H}{D}\right)^{\frac{3}{2}}$ følger

$$\frac{D-H}{D} = \left(\frac{\boldsymbol{v}-v_0}{\boldsymbol{v}-v_1}\right)^{\frac{2}{3}},\quad D = \frac{H}{1-\left(\frac{\boldsymbol{v}-v_0}{\boldsymbol{v}-v_1}\right)^{\frac{2}{3}}} \text{ og } (D-H) = \frac{\left(\frac{\boldsymbol{v}-v_0}{\boldsymbol{v}-v_1}\right)^{\frac{2}{3}}.H}{1-\left(\frac{\boldsymbol{v}-v_0}{\boldsymbol{v}-v_1}\right)^{\frac{2}{3}}} \quad \ldots\ldots (19)$$

Af Formlerne (15) og (19) følger dernæst let, at

$$4{,}8\sqrt{m_1}\,(V-v_1) = -\frac{26{,}833\sqrt{\frac{h}{l}}.H}{\sqrt{1-\left(\frac{\boldsymbol{v}-v_0}{\boldsymbol{v}-v_1}\right)^{\frac{2}{3}}}} \text{ og } 4{,}8\sqrt{m}.v_0 = -\frac{26{,}833\sqrt{\frac{h}{l}}\,H\left(\frac{\boldsymbol{v}-v_0}{\boldsymbol{v}-v_1}\right)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{1-\left(\frac{\boldsymbol{v}-v_0}{\boldsymbol{v}-v_1}\right)^{\frac{2}{3}}}} \ldots (20)$$

Af den almindelige Formel (16), der kan fremstilles saaledes

$$v = \boldsymbol{v} + 4{,}8\sqrt{m_1}\,(V-v_1)\left(\frac{x}{D}\right)^{\frac{3}{2}} = \boldsymbol{v}-(\boldsymbol{v}-v_1)\left(\frac{x}{D}\right)^{\frac{3}{2}},$$

kan Strømmens Vandføring svarende til en Brede $= 1$ let bestemmes. Betegne vi denne Vandføring ved $q$ og Strømmens Middelhastighed ved $w$, saa er

$$q = w.H = \int_{D-H}^{D} v.dx,$$

og naar vi for $v$ indsætte den angivne Værdi, erholdes:

$$w.H = \boldsymbol{v}.H - \tfrac{2}{5}(\boldsymbol{v}-v_1).\frac{D^{\frac{5}{2}}-(D-H)^{\frac{5}{2}}}{D^{\frac{3}{2}}}.$$

Indsættes heri Værdierne for $D$ og $(D-H)$ ifølge Formlerne (19), saa findes let at Strømmens Middelhastighed $w$ kan fremstilles:

$$w = \boldsymbol{v} - \tfrac{2}{5}.\frac{(\boldsymbol{v}-v_1)^{\frac{5}{3}}-(\boldsymbol{v}-v_0)^{\frac{5}{3}}}{(\boldsymbol{v}-v_1)^{\frac{2}{3}}-(\boldsymbol{v}-v_0)^{\frac{2}{3}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

Betegne vi endelig Afstanden fra Dækfladen til det Strømelement, hvis Hastighed er $v$ med $y$, saa er $y = D - x$; men indsætte vi heri Værdierne

$$D = \frac{H}{1-\left(\frac{\boldsymbol{v}-v_0}{\boldsymbol{v}-v_1}\right)^{\frac{2}{3}}} \text{ og } x = \left(\frac{\boldsymbol{v}-v}{\boldsymbol{v}-v_1}\right)^{\frac{2}{3}}.D,$$

saa finde vi den til Hastigheden $v$ svarende Dybde $y$ bestemt ved Ligningen:

$$y = \frac{(\boldsymbol{v}-v_1)^{\frac{2}{3}}-(\boldsymbol{v}-v)^{\frac{2}{3}}}{(\boldsymbol{v}-v_1)^{\frac{2}{3}}-(\boldsymbol{v}-v_0)^{\frac{2}{3}}}.H \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

Formlerne (14) til (22) omfatte altsaa den II<sup>den</sup> Classe af Strømningsforhold og fremstille de almindelige Love, som gjælde for de Vandbevægelser, som fremtræde naar $V$ er negativt større end den ved Formlen (12) bestemte Grændse; men de omfatte tillige, ligesom den foregaaende Classe af Tilfælde, selve denne Grændse, hvad vi let kunne overbevise os om.

Antages nemlig at $\mathfrak{v} = v_0 = 0$, saa finde vi ifølge (17) og (20) at

$$v_1 = 4{,}8\sqrt{m_1}\,(V - v_1) \text{ og } 4{,}8\sqrt{m_1}\,(V - v_1) = -26{,}833\,.\sqrt{\frac{h}{l}H},$$

og følgelig er

$$v_1 = -26{,}833\,.\sqrt{\frac{h}{l}H} \text{ og } V = -\frac{1 + 4{,}8\sqrt{m_1}}{4{,}8\sqrt{m_1}}\,.\,26{,}833\,.\sqrt{\frac{h}{l}H},$$

som netop er Formlen (12).

Det staaer altsaa nu kun tilbage at bestemme de Love, hvorunder Vandet bevæger sig i de Tilfælde, som henhøre under den III<sup>die</sup> Classe af Strømforhold, der fremtræde, naar Dækslets Hastighed $V$ er positiv og større end den ved Formlen (13) bestemte Grændse.

Tænke vi os $V$ at være positiv og større end den betragtede Strøms Overfladehastighed $v_1$, saa vil Dækslets Reaction rive de øvre Dele af Vandmassen med sig i Retning af Vandspeilsfaldet. Den hele bevægende Kraft, som driver Vandmassen frem i Retning af Vandspeilsfaldet, er da som man seer fremstillet ved

$$m_1 (V - v_1)^2 + g\frac{h}{l}\,.\,H,$$

og da Strømmen bevæger sig i denne Retning med constant Hastighed, saa maa denne Kraft være ligestor med Reactionen $(m\,.\,v_0^2)$ af Ledningens Bund. Vi maa altsaa for denne Classe af Strømninger have:

$$m_1 (V - v_1)^2 + g\frac{h}{l}\,.\,H = m\,.\,v_0^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Bemærke vi dernæst at for et hvilketsomhelst Element af denne Strøm er den drivende Kraft udtrykt ved $m_1 (V - v_1)^2 + g\frac{h}{l}\,.\,y$, naar $y$ betegner Strømelementets Dybde under Dækfladen, saa bliver det let indlysende, at Vandet i den omhandlede Strøm vil bevæge sig paa samme Maade, som det bevæger sig i en Strøm, hvis Dybde $D$ er bestemt ved Ligningen:

$$m_1 (V - v_1)^2 + g\frac{h}{l}H = g\frac{h}{l}\,.\,D = m\,.\,v_0^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

og hvis Vandspeil er frit.

Betegne vi dette Vandspeils Hastighed ved $\mathfrak{v}$ og Strømhastigheden i en Afstand $x$ fra dette Vandspeil ved $v$, saa kan denne Hastighed fremstilles ifølge Formlen (1) ved

$$v = \mathfrak{v} - 4{,}8\sqrt{m}\,.\,v_0\left(\frac{x}{D}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Da Strømforholdene i denne tænkte Strøm skulle være de samme fra Bundfladen indtil Høiden $H$ som i den givne Strøm, saa skulle vi ikke blot have $v = v_0$ for $x = D$, men tillige $v = v_1$ for $x = D - H$. Naar disse sammenhørende Værdier for $v$ og $x$ indsættes i Formlen (25) erholdes:

$$\boldsymbol{v} = (1 + 4{,}8\sqrt{m}) \,.\, v_0 \text{ og } v_1 = \boldsymbol{v} - 4{,}8\sqrt{m} \,.\, v_0 \left(\frac{D-H}{D}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots (26)$$

Af disse to Ligninger følger dernæst:

$$\frac{D-H}{D} = \left(\frac{\boldsymbol{v}-v_1}{\boldsymbol{v}-v_0}\right)^{\frac{2}{3}},\ D = \frac{H}{1-\left(\frac{\boldsymbol{v}-v_1}{\boldsymbol{v}-v_0}\right)^{\frac{2}{3}}} \text{ og } D-H = \frac{\left(\frac{\boldsymbol{v}-v_1}{\boldsymbol{v}-v_0}\right)^{\frac{2}{3}} . H}{1-\left(\frac{\boldsymbol{v}-v_1}{\boldsymbol{v}-v_0}\right)^{\frac{2}{3}}} \quad . . (27)$$

og af disse i Forbindelse med (24) følger endvidere:

$$4{,}8\sqrt{m_1}\,(V - v_1) = \frac{26{,}833\sqrt{\frac{h}{l}}\,H\left(\frac{\boldsymbol{v}-v_1}{\boldsymbol{v}-v_0}\right)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{1-\left(\frac{\boldsymbol{v}-v_1}{\boldsymbol{v}-v_0}\right)^{\frac{2}{3}}}} \text{ og } 4{,}8\sqrt{m} \,.\, v_0 = \frac{26{,}833\sqrt{\frac{h}{l}} . H}{\sqrt{1-\left(\frac{\boldsymbol{v}-v_1}{\boldsymbol{v}-v_0}\right)^{\frac{2}{3}}}} \,. \quad (28)$$

For nu at bestemme Strømmens Vandføring for Eenhed af Brede, bemærkes, at hvis denne ligesom tidligere betegnes med $q$, saa er

$$q = w \,.\, H = \int_{D-H}^{D} v \,.\, dx,$$

naar $w$ betegner Strømmens Middelhastighed.

Indsættes Værdien for $v$ ifølge Formlen (25), der kan skrives:

$$v = \boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} - v_0) \,.\, \left(\frac{x}{D}\right)^{\frac{3}{2}},$$

erholdes

$$w \,.\, H = \boldsymbol{v} \,.\, H - \tfrac{2}{5}(\boldsymbol{v} - v_0) \,.\, \frac{D^{\frac{5}{2}} - (D-H)^{\frac{5}{2}}}{D^{\frac{3}{2}}},$$

og naar Værdien for $D$ og $(D - H)$ indsættes ifølge Formlerne (27), findes

$$w = \boldsymbol{v} - \tfrac{2}{5} \,.\, \frac{(\boldsymbol{v} - v_0)^{\frac{5}{3}} - (\boldsymbol{v} - v_1)^{\frac{5}{3}}}{(\boldsymbol{v} - v_0)^{\frac{2}{3}} - (\boldsymbol{v} - v_1)^{\frac{2}{3}}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

der sees at være den samme Formel, som er fremstillet i (21), der gjælder for negative Værdier af $V$, som ere større end Grændseværdien (12), medens (29) gjælder for positive Værdier af $V$, der ere større end Grændseværdien (13). Det er imidlertid kun i Formen, at Udtrykkene for Strømmens Middelhastighed ere de samme i de to Tilfælde; thi det vil let sees, at Maximumshastigheden $\boldsymbol{v}$ af den tænkte dybere Vandstrøm afhænger paa forskjellig Maade af $v_0$ og $v_1$ i disse Tilfælde.

Betegne vi for den her omhandlede Classe af Strømningsforhold Afstanden fra Dækslet til det vilkaarlige Strømelement, hvis Hastighed er $v$, ved $y$, saa er $y = x - (D - H)$ og altsaa $\frac{y}{D} = \frac{x}{D} - \left(\frac{D-H}{D}\right)$; men bemærke vi derhos, at ifølge (25) og (27) er

$$\frac{x}{D} = \left(\frac{\mathfrak{v} - v}{\mathfrak{v} - v_0}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad \frac{D-H}{D} = \left(\frac{\mathfrak{v} - v_1}{\mathfrak{v} - v_0}\right)^{\frac{2}{3}} \text{ og } D = \frac{H}{1 - \left(\frac{\mathfrak{v} - v_1}{\mathfrak{v} - v_0}\right)^{\frac{2}{3}}},$$

saa finde vi let, at Vanddybden, hvori Strømhastigheden er $v$, er:

$$y = \frac{(\mathfrak{v} - v)^{\frac{2}{3}} - (\mathfrak{v} - v_1)^{\frac{2}{3}}}{(\mathfrak{v} - v_0)^{\frac{2}{3}} - (\mathfrak{v} - v_1)^{\frac{2}{3}}} \cdot H, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (30)$$

som er overeensstemmende med Formlen (22) paa samme Maade som (29) er overeensstemmende med Formlen (21). Ved de her angivne Formler (23) til (30) ere Lovene for Vandets Bevægelse bestemte for den IIIdie Classe af Strømningsforhold.

For at kunne gjøre Anvendelse af disse forskjellige Formler paa bestemte foreliggende Tilfælde maa det forudsættes, at vi enten have givet Hastighederne $\mathfrak{v}$, $v_0$ og $v_1$, som indgaae i de foranførte Formler, eller at vi i ethvert forekommende Tilfælde kunne bestemme disse Størrelser.

Lad os forudsætte som det Almindeligste, at vi kjende Vandstrømmens Dybde $H$, Vandspeilets Fald $\frac{h}{l}$, samt Modstandscoefficienterne $m$ og $m_1$ svarende til Ledningens Bund- og Dækflade, tillige med Dækfladens Hastighed $V$, saa stiller der sig altsaa den Opgave, ved Hjælp af de givne Størrelser at bestemme Størrelserne $\mathfrak{v}$, $v_0$ og $v_1$. Denne Opgave skal jeg derfor nu gaae over til at behandle særligt for enhver af de tre Classer af Strømningsforhold, idet jeg blot for Kortheds Skyld vil indføre følgende Betegnelser:

$$a^2 = 720 \cdot \frac{h}{l} H, \quad a = 26{,}833 \cdot \sqrt{\frac{h}{l} \cdot H}, \quad b = 4{,}8\sqrt{m_1} \text{ og } c = 4{,}8\sqrt{m}, \quad \ldots \quad (31)$$

Til Bestemmelsen af Størrelserne $\mathfrak{v}$, $v_0$ og $v_1$, svarende til Strømninger af Iste Classe, der grafisk er fremstillet i Figurerne 1—6, haves Formlerne (4) og (5), der som man seer kunne skrives:

$$c^2 \cdot v_0^2 + b^2 (V - v_1)^2 = a^2, \quad \mathfrak{v} = (1 + c) \cdot v_0 \text{ og } v_1 - \mathfrak{v} = b(V - v_1) \quad \ldots (32)$$

Ved at borteliminere $\mathfrak{v}$ mellem de to sidste Ligninger (32) findes:

$$v_0 = \frac{v_1 - b(V - v_1)}{1 + c} = \frac{V - (1 + b)(V - v_1)}{1 + c}, \text{ hvoraf}$$

$$c^2 v^2 = \left(\frac{c}{1 + c}\right)^2 \left[V^2 - 2(1 + b)(V - v_1)V + (1 + b)^2 (V - v_1)^2\right].$$

Naar denne Værdi for $c^2 v_0^2$ indsættes i den første af Formlerne (32) findes:

$$b(V - v_1) = \frac{\left(\frac{1+b}{b}\right).V - \left(\frac{1+c}{c}\right)\sqrt{\left[\left(\frac{1+b}{b}\right)^2 + \left(\frac{1+c}{c}\right)^2\right]a^2 - V^2}}{\left(\frac{1+b}{b}\right)^2 + \left(\frac{1+c}{c}\right)^2}, \quad (33)$$

idet det viser sig ved at betragte Grændserne (12) og (13), hvortil respective svarer:

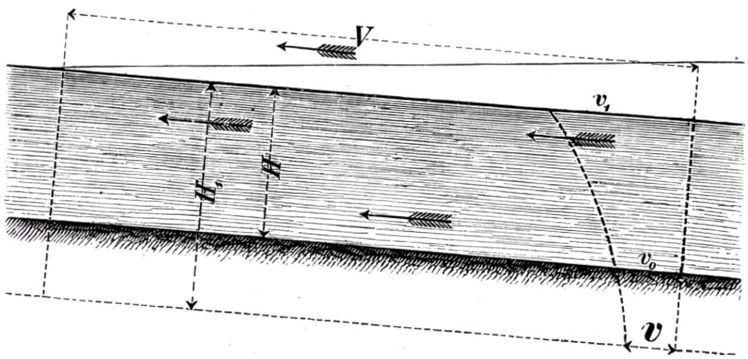
$$V = -\frac{1+b}{b}.a \quad \text{og} \quad V = \frac{1+c}{c}.a,$$

at det positive Tegn foran Qvadratroden maa forkastes som Sagen uvedkommende.

Naar $b(V - v_1)$ er bestemt ifølge Formlen (33), er $v_1$ bekjendt, og da findes let $v_0$ og $\boldsymbol{v}$ ifølge Formlerne (32).

Betragte vi dernæst den IIden Classe af Strømforhold, der — overeensstemmende med Fig. 1—6 for Iste Classe af Strømforhold — er grafisk fremstillet i hosstaaende Figur 7,

*Fig. 7.*




saa haves til Bestemmelsen af Størrelserne $\boldsymbol{v}$, $v_0$ og $v_1$ Formlerne (14), (17) og (20), der kunne fremstilles saaledes:

$$b^2(V - v_1)^2 = a^2 + c^2.v_0^2, \quad (\boldsymbol{v} - v_1) = -b(V - v_1) \quad \text{og} \quad b^2(V - v_1)^2 = \frac{a^2}{1 - \left(\frac{\boldsymbol{v} - v_0}{\boldsymbol{v} - v_1}\right)^{\frac{2}{3}}}. (34)$$

Af den sidste Ligning (34) findes

$$b^2(V - v_1)^2 - b^2(V - v_1)^2 . \frac{(\boldsymbol{v} - v_0)^{\frac{2}{3}}}{(\boldsymbol{v} - v_1)^{\frac{2}{3}}} = a^2$$

og da vi ifølge den anden Ligning have $(\boldsymbol{v} - v_1)^{\frac{2}{3}} = b^{\frac{2}{3}}(V - v_1)^{\frac{2}{3}}$, findes

$$b^{\frac{4}{3}}(V - v_1)^{\frac{4}{3}}(\boldsymbol{v} - v_0)^{\frac{2}{3}} = b^2(V - v_1)^2 - a^2.$$

Bemærkes dernæst, ifølge den første af Ligningerne (34), at

$$b^{\frac{4}{3}}(V - v_1)^{\frac{4}{3}} = (c^2.v_0^2 + a^2)^{\frac{2}{3}} \quad \text{og} \quad b^2(V - v_1)^2 - a^2 = c^2.v_0^2,$$

sees, at ovenstaaende Ligning kan skrives:

$$(c^2 v_0^2 + a^2)^{\frac{2}{3}} . (\boldsymbol{v} - v_0)^{\frac{2}{3}} = c^2 v_0^2,$$

hvoraf følger:

$$\boldsymbol{v} - v_0 = - \frac{c^3 . v_0^3}{c^2 v_0^2 + a^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

Bemærkes fremdeles at den anden Formel (34) kan skrives:

$$V - \boldsymbol{v} = \frac{1+b}{b} . b(V - v_1)$$

samt at den første Formel (34) giver $b(V - v_1) = -\sqrt{c^2 v_0^2 + a^2}$, saa følger let, at

$$\boldsymbol{v} = V + \frac{1+b}{b} . \sqrt{c^2 . v_0^2 + a^2}, \text{ og følgelig er}$$

$$(\boldsymbol{v} - v_0) = (V - v_0) + \frac{1+b}{b} \sqrt{c^2 . v_0^2 + a^2}.$$

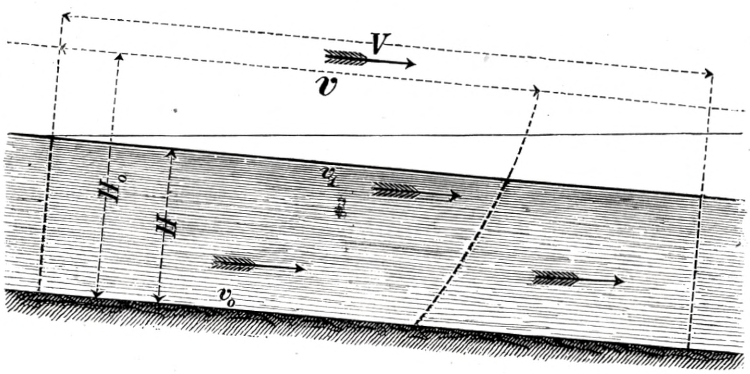
Men multipliceres denne Ligning med $(c^2 v_0^2 + a^2)$, idet man tager Hensyn til Formlen (35) findes

$$V - v_0 = \div \frac{\left(\frac{1+b}{b}\right)(c^2 v_0^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} + c^3 v_0^3}{c^2 v_0^2 + a^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

hvilken Ligning tjener til at bestemme Værdien af $v_0$ ved Hjælp af $a$, $b$, $c$ og $V$. Naar $v_0$ er funden, bestemmes $\boldsymbol{v}$ af Formlen (35), og $v_1$ af den anden Formel (34), der kan skrives $v_1 = \frac{\boldsymbol{v} + b . V}{1 + b}$.

Betragte vi endelig den III^die^ Classe af Strømninger, som er grafisk fremstillet i hosstaaende Figur 8, saa haves til Bestemmelsen af $\boldsymbol{v}$, $v_0$ og $v_1$ Formlerne (23),

*Fig. 8.*




(26) og (28), som kunne skrives:

$$b^2 . (V - v_1)^2 + a^2 = c^2 . v_0^2, \quad \boldsymbol{v} = (1 + c) . v_0 \text{ og } b^2 (V - v_1)^2 = \frac{(\boldsymbol{v} - v_1)^{\frac{2}{3}} . a^2}{(\boldsymbol{v} - v_0)^{\frac{2}{3}} - (\boldsymbol{v} - v_1)^{\frac{2}{3}}} \quad (37)$$

Af den sidste af disse Ligninger følger

$$b^2 (V - v_1)^2 + a^2 = \frac{(\boldsymbol{v} - v_0)^{\frac{2}{3}} \cdot a^2}{(\boldsymbol{v} - v_0)^{\frac{2}{3}} - (\boldsymbol{v} - v_1)^{\frac{2}{3}}}$$

og ved Division findes

$$\frac{b^2 (V - v_1)^2}{b^2 (V - v_1)^2 + a^2} = \left(\frac{\boldsymbol{v} - v_1}{\boldsymbol{v} - v_0}\right)^{\frac{2}{3}}, \text{ hvoraf}$$

$$\left(\frac{\boldsymbol{v} - v_1}{\boldsymbol{v} - v_0}\right) = \frac{b^3 (V - v_1)^3}{[b^2 (V - v_1)^2 + a^2]^{\frac{3}{2}}};$$

men af den 2den Ligning (37) følger

$$(\boldsymbol{v} - v_0) = (c \cdot v_0) \text{ og } (\boldsymbol{v} - v_1) = \frac{1 + c}{c} \cdot (c v_0) - v_1,$$

og ifølge den første Ligning findes altsaa:

$$\boldsymbol{v} - v_0) = \sqrt{b^2 (V - v_1)^2 + a^2} \text{ og } (\boldsymbol{v} - v_1) = \frac{1 + c}{c} \sqrt{b^2 (V - v_1)^2 + a^2} - v_1 .$$

Det er derfor let at see at ovenstaaende Ligning kan skrives:

$$v_1 = \frac{\frac{1 + c}{c} (b^2 (V - v_1)^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} - (b (V - v_1))^3}{b^2 (V - v_1)^2 + a^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (38)$$

hvoraf Strømhastigheden $v_1$ skal bestemmes. Naar $v_1$ er funden, findes $v_0$ af den første Ligning (37) og derefter $\boldsymbol{v}$ af den anden af disse Ligninger.

---

Blandt de Anvendelser, som kunne gjøres af de angivne Formler, ligger det her naturligviis lige for Haanden at benytte Formlerne til nærmere at undersøge Strømningsforholdene i Havet, som fremkaldes ved Vindens Kraft under Luftens Bevægelse hen over Vandspeilet.

Men naar vi betragte Luften som den bevægelige Dækflade, der med Vindens Hastighed glider hen over Vandspeilet, saa bliver det fornødent at undersøge, hvilke Værdier de to Modstandscoefficienter $m$ og $m_1$, der henholdsviis svare til Luftens og Havbundens Modstand, skulle tillægges.

I min tidligere Afhandling om Strømforholdene har jeg, efter de der fremstillede Resultater af Brunings Forsøg over Hastighedsforholdene i Rhinen m. fl. Strømme, antaget at Modstandscofficienten for Havstrømme maa sættes til $m = 0{,}025$, fordi denne Værdi omtrent svarede til den største Ledningsmodstand, der viste sig under de nævnte Forsøg og navnlig under Forhold, hvor Vandstrømmen maatte antages at bevæge sig paa underliggende Vandmasser, som ved Ujevnheder i Bunden vare forhindrede fra at følge Strømmens Flugt. Senere har jeg imidlertid faaet en ikke ringe Tvivl om det er rigtigt at betragte Havstrømmenes Modstandscoefficient som Grændsen for den i disse Floder fremkomne Modstandscoefficient, da dennes Størrelse netop kan tænkes at hidrøre fra de særlige Modstande, som Strømmens Brydninger mod fremstaaende Klippemasser etc. foraarsage, og denne Tanke har navnlig fundet Bestyrkelse deri, at det er en Kjendsgjerning, at naar en Vandstrøm bevæger sig igjennem et af vore almindelige Vandløb, hvis Bund er jevn og bestaaer af Steen, Gruus, Sand o. s. v. som er fuldstændigt gjennemtrængt af stillestaaende Vand, saa bevæger Vandstrømmen sig hen derover med langt mindre Modstand end den som Rhinen frembød, hvad ogsaa ligefrem viser sig af Brunings Forsøg over Strømhastigheden i den pannerdenske Kanal, hvor Modstandscoefficienten omtrent kun var $^1/_5$ Deel af den ovenfor angivne Værdi. Min første Tvivl om Rigtigheden af at fastholde Modstandscoefficienten $m = 0{,}025$ skriver sig imidlertid derfra, at jeg ved at indføre denne Værdi i de foranførte Formler kom til et Resultat angaaende Luftmodstanden, som var i Strid med en almindelig Lov om Fluiders Ledningsmodstand, som jeg har fremstillet i Oversigterne over det Kongelige danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger i Aaret 1865, og som jeg senere paa mange forskjellige Maader har fundet bekræftet som en almindelig gjældende Lov i Naturen. Ifølge denne Lov, — som siger, at Ledningsmodstanden for forskjellige Fluider, som bringes til at gjennemstrømme samme Ledning med samme Hastighed, forholder sig som Fluidernes Tætheder, — kan det paaregnes, at naar en Vandstrøm ved at bevæge sig med Hastigheden $v$ langs en stillestaaende Vandflade lider en Modstand, som kan fremstilles ved: $m \,.\, v^2$, saa vil den samme Strøm ved at bevæge sig langs en stillestaaende Luftflade med Hastigheden $v$ lide en Modstand, som kan fremstilles ved: $(m \,.\, \rho) \,.\, v^2$, naar $\rho$ betegner Luftens Tæthed i Forhold til Vand.

Lade vi foreløbigt $m$ henstaae som ubekjendt og indsætte i de foregaaende Formler efter ovenstaaende Lov Luftens Modstandscoefficient $m_1 = m\rho$, saa sætter Stormen og Høivandet den 13de November 1872 os istand til paa den meest storartede Maade at bestemme Havbundens Modstandscoefficient $m$.

Sætte vi Luftens Tæthed $\rho = 0{,}0013$ af Vandets, altsaa af $\sqrt{\rho} = 0{,}036$, saa kunne vi efter det Anførte sætte:

$$m_1 = 0{,}0013 \,.\, m \text{ og } \sqrt{m_1} = 0{,}036 \,.\, \sqrt{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

For derefter ved Hjælp af Stormfloden at bestemme Værdien af $m$, ville vi henvende vor Opmærksomhed paa det saakaldte «Frische Haff», hvorved der heldigviis er foretaget 2de Rækker af Observationer, den ene i Pillau, den anden i Elbing, der synes særlig skikkede til at afgive Grundlag for en saadan Bestemmelse. «Frische Haff» er som bekjendt et langt og forholdsviis smalt Hav, hvis Længderetning gaaer omtrent fra S.V. til N.O.; dets Brede er 4 til 6 Qvartmiil og dets hele Længde fra Elbing til Kønigsberg er omtrent 45 Qvartmiil. Fra Elbing paa Havets sydligste Punkt til Pillau ved dets nordvestlige Hjørne er Afstanden derimod kun c. 30 Qvartmiil eller 180000 Fod og fra Elbing gaaer Retningslinien til Pillau Øst 50° Nord hen. Ved Pillau er «Frische Haff» i Forbindelse med Østersøen, men forøvrigt er det et lukket Hav, hvori en Green af Weichselfloden udmunder.

Under Nordoststormen den 12te og 13de Novbr. 1872 blev Vandet i «Frische Haff» drevet S. V. hen fra Pillau mod Elbing og blev der opstemmet af Vinden, og en Vandspeilssænkning ved Pillau vilde altsaa have indtraadt, hvis ikke «Frische Haff» paa dette Sted havde staaet i Forbindelse med Østersøen og faaet Tilløb derfra. De to Rækker af Observationer over Vandspeilsstanden ved Pillau og ved Elbing, give os derfor et udmærket Middel til at bestemme den Høide til hvilken Vinden har opstemmet Vandet, og som Resultater af udførte Maalinger, skal her anføres:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1) At ved Pillau var Vandstandshøiden d. 13. Nov. 1872: | Ved Døgnets Beg. | omtr. | 0,5′ | o. d. V. |
| | Kl. 6 Formidd. | — | 0,0′ | — |
| | - 12 Middag | — | 0,0′ | — |
| | - 6 Eftermidd. | — | 0,0′ | — |
| | - 12 Midnat | — | 0,5′ | — |
| og 2) at ved Elbing var Vandstandshøiden d. 13. Nov. 1872: | Ved Døgnets Beg. | omtr. | 4,25′ | — |
| | Kl. 6 Formidd. | — | 4,5′ | — |
| | - 12 Middag | — | 4,75′ | — |
| | - 6 Eftermidd. | — | 4,25′ | — |
| | - 12 Midnat | — | 3,5′ | —. |

Ved at betragte disse Vandstandshøider viser der sig det heldige Forhold, at Vandstanden paa begge Endepunkter omtrent har holdt sig uforandret hele Formiddagen indtil Middag, og ved at betragte Dybderne paa et Søkort over «Frische Haff» viser det sig fremdeles, at Vandspeilet paa hele Strækningen fra Pillau til Elbing omtrent har ligget i en Høide af 13,33 Fod over Havets Bund.

Med Hensyn til Vindforholdene for «Frische Haff» den 13de Novbr. 1872 vil man ifølge de derover foretagne Observationer kunne sætte Vindretningen og Vindhastigheden, saaledes som angivet i efterfølgende Tavle:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ved Døgnets Begyndelse: | Vindretningen | NO. t. O. | med | en Hastighed | af | 75 | Fod. |
| Klokken 6 Formiddag | — | ONO. | med | — | - | 75 | — |
| — 12 Middag | — | O. | med | — | - | 75 | — |
| — 6 Eftermiddag | — | O. t. S. | med | — | - | 60 | — |
| — 12 Midnat | — | O. t. S. ½ S. | med | — | - | 45 | —. |

Gaae vi ud herfra og lægge vi Mærke til at hele Formiddagen opstemmedes Vandet i «Frische Haff» mere og mere, til det om Middagen ved Vindens Dreining til ret Øst med 75 Fods Hastighed ophørte at stige, saa følger deraf, at denne Vind netop var tilstrækkelig til at holde Vandet opstemmet til en Høide af 4,75 Fod paa en Længde af 180000 Fod, medens den var ude af Stand til yderligere at opstemme Vandet. I dette Tilfælde er det tydeligt, at Strømningsforholdene maa henhøre under hvad vi i det Foregaaende have betegnet som den Iste Classe af Strømninger, og da Vandspeilet Kl. 12 var staaende, saa var tilmed Middelhastigheden $w = 0$. Men da Vinden var Øst, saa var dens Hastighed i Retningen af Linien Pillau-Elbing kun $= 75 \cdot \cos 50^\circ = 48$ Fod, og denne Vindhastighed er altsaa efter de gjorte Iagttagelser tilstrækkelig til i det givne Tilfælde at opstemme Vandet indtil 4,75 Fod paa 180000 Fod og holde det paa denne Høide, uden at stige eller falde.

For ved Hjælp af disse Observationer at bestemme Størrelsen $m$, ville vi i de til Iste Classe Strømninger svarende Formler (2) til (13) indsætte

$$V = -48,\quad h = 4{,}75,\quad l = 180000,\quad w = 0,\quad H = 13{,}33 \text{ og } m_1 = 0{,}0013 \,.\, m.$$

Det maa da først bemærkes ifølge Formlerne (5), at

$$\boldsymbol{v} - v_0 = \frac{4{,}8\sqrt{m}}{1 + 4{,}8\sqrt{m}} \,.\, \boldsymbol{v} \text{ og } \boldsymbol{v} - v_1 = -\frac{4{,}8\sqrt{m_1}}{1 + 4{,}8\sqrt{m_1}}(V - \boldsymbol{v});$$

naar vi derfor sætte $\left(\frac{\boldsymbol{v} - v_1}{\boldsymbol{v} - v_0}\right) = z$, erholdes:

$$z = -\frac{\dfrac{4{,}8\sqrt{m_1}}{1 + 4{,}8\sqrt{m_1}}}{\dfrac{4{,}8\sqrt{m}}{1 + 4{,}8\sqrt{m}}}\left(\frac{V}{\boldsymbol{v}} - 1\right) = -\frac{\dfrac{b}{1+b}}{\dfrac{c}{1+c}}\left(\frac{V}{\boldsymbol{v}} - 1\right),$$

hvoraf følger at

$$\frac{c}{1+c} \,.\, \boldsymbol{v} = -\frac{u \,.\, V}{z - \dfrac{u}{\dfrac{c}{1+c}}}, \text{ naar vi sætte } u = \frac{b}{1+b} \text{ eller } b = \frac{u}{1-u}.$$

Af $b = \frac{u}{1-u} = \sqrt{0{,}0013} \,.\, c = 0{,}036 \,.\, c$ følger dernæst $\frac{c}{1+c} = \frac{u}{0{,}036 + 0{,}964 \,.\, u}$,

og derefter

$$\frac{c}{1+c} \,.\, \boldsymbol{v} = -\frac{u \,.\, V}{z - 0{,}036 - 0{,}964 \,.\, u} = (\boldsymbol{v} - v_0),$$

som i Forbindelse med Formlen (7), der kan skrives $(\boldsymbol{v} - v_0)\sqrt{1 + z^2} = 26{,}833 \,.\, \sqrt{\frac{h}{l}}\, H$,

giver

$$-u \,.\, V \,.\, \sqrt{1 + z^2} = 26{,}833 \sqrt{\frac{h}{l}}\, H (z - 0{,}036 - 0{,}964 \,.\, u) \quad \ldots\ldots\ldots (40)$$

Ifølge Formlen (10) haves dernæst, idet $w = 0$,

$$1 = \tfrac{2}{5} \frac{c}{1+c} \cdot \frac{1+z^3}{1+z^2}, \text{ hvoraf } \frac{u}{\dfrac{c}{1+c}} = \tfrac{2}{5}\, u \frac{1+z^3}{1+z^2};$$

ifølge Ovenstaaende er da

$$\tfrac{5}{2}(0{,}036 + 0{,}964\, u) = u \,.\, \frac{1+z^3}{1+z^2} \text{ eller}$$

$$(0{,}09 + 2{,}41 \,.\, u)(1 + z^2) = u \,.\, (1 + z^3) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (41)$$

Naar Formlerne (40) og (41) ordnes efter Potenser af $u$, erholdes

$$\left[-V.\sqrt{1+z^2}+25{,}867\sqrt{\frac{h}{l}H}\right]u = 26{,}833\sqrt{\frac{h}{l}H}(z-0{,}036) \text{ og}$$

$$0{,}09\,(1+z^2) = u\,.\,[1+z^3-2{,}41\,(1+z^2)].$$

Ved Multiplikation af disse Ligninger erholdes

$$\left(-V.\sqrt{1+z^2}+25{,}867.\sqrt{\frac{h}{l}H}\right).0{,}09(1+z^2) = 26{,}833\sqrt{\frac{h}{l}H}(z-0{,}036)[z^3-2{,}41\,z^2-1{,}41],$$

hvoraf følger, at

$$(1+z^2)^{\frac{3}{2}} = 298{,}144\,\frac{\sqrt{\frac{h}{l}H}}{(-V)}[z^4-2{,}446\,.\,z^3-1{,}41\,.\,z-0{,}036].$$

Indsættes heri de ovenangivne Værdier for $V$, $h$, $l$ og $H$, erholdes:

$$(1+z^2)^{\frac{3}{2}} = 0{,}116509\,(z^4-2{,}446\,.\,z^3-1{,}41\,.\,z-0{,}036).$$

Af denne Ligning findes $z = 11{,}144$ og derefter $u = \dfrac{b}{1+b} = 0{,}010405$ og $\dfrac{c}{1+c} = 0{,}22604$, $b = 4{,}8\sqrt{m_1} = 0{,}010514$, $c = 4{,}8\sqrt{m} = 0{,}29206$, $\sqrt{m} = 0{,}060845$, $m = 0{,}00370$.

Naar disse Værdier for $\sqrt{m}$ og $m$ sammenlignes med de Værdier, som Brunings Forsøg med den pannerdenske Canal have givet, see min Afhandl. om Strømforholdene pag. 130, saa findes Modstandscoefficienten svarende til Brunings Maalninger at variere omkring den her fundne Værdi; sammenligne vi dernæst den fundne Værdi for $m$ med Modstandscoefficienten for nye Støbejerns- og andre veludførte Ledninger, saa see vi tillige, at Havbundens Modstandscoefficient meget nær svarer til Modstanden i disse Ledninger, og der kan saaledes ikke være nogen Tvivl om, at naar Havet ikke frembyder særlige Forhindringer mod Vandets Bevægelse, kan man sætte dets Modstandscoefficient ligestor med Modstandscoefficienten for almindelige Ledninger.

I Henhold hertil kunne vi altsaa for vore Farvande sætte:

$$\frac{1+b}{b} = \frac{1+4{,}8\sqrt{m_1}}{4{,}8\sqrt{m_1}} = 96{,}108 \text{ og } \frac{1+c}{c} = \frac{1+4{,}8\sqrt{m}}{4{,}8\sqrt{m}} = 4{,}424.$$

Efter saaledes at have bestemt de forkjellige Constanter som indgaae i Formlerne for de angivne 3 Classer af Strømningsforhold, kunne vi strax bemærke, at for den Iste Classe af Strømninger haves i Almindelighed ifølge Formlen (40)

$$V = -26{,}833\,.\sqrt{\frac{h}{l}H}\,\frac{z-0{,}046}{0{,}010405\sqrt{1+z^2}},$$

og for det Tilfælde, at Strømmens Middelhastighed $w = 0$, hvortil ifølge det Foregaaende svarer $z = 11{,}144$, findes Vindhastigheden at være:

$$V = \div 2558 . \sqrt{\frac{h}{l} H}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

Betragte vi dernæst de ved Formlerne (12) og (13) bestemte Grændseværdier, hvorimellem Vindhastigheden maa være beliggende, for at Strømningerne skulle henhøre under Iste Classe, saa sees, at Vindhastighedens negative Grændse, bestemt ved (12) og svarende til de ved Fig. 6 angivne Strømforhold, kan fremstilles:

$$V = -2579 . \sqrt{\frac{h}{l} H}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

hvortil svarer $\boldsymbol{v} = v_0 = 0$, og ifølge (10) $w = \frac{2}{5} v_1$, idet $v_1 = -26{,}833 \sqrt{\frac{h}{l} H}$.

Vindhastighedens positive Grændse, svarende til Fig. 1, findes derimod ifølge (18) at være:

$$V = 118{,}7 . \sqrt{\frac{h}{l}} . H. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

Ville vi bestemme Vindhastigheden $V$ svarende til det særlige Tilfælde at $v_1 = 0$, see Fig. 4, da finde vi ifølge Formlerne (32)

$$v_0 = \frac{a}{\sqrt{c^2 + (1+c)^2}} = 20{,}23 . \sqrt{\frac{h}{l} H} \text{ og } \boldsymbol{v} = 26{,}137 . \sqrt{\frac{h}{l} H};$$

da dernæst $V = \div \frac{\boldsymbol{v}}{b} = -\frac{\boldsymbol{v}}{0{,}01051}$, følger videre, at til $v_1 = 0$ svarer

$$V = -2487 . \sqrt{\frac{h}{l} H}.$$

Ved at sammenligne denne Formel med Formlerne (42) og (43) vil det sees, at naar Vinden først har naaet den Styrke, som udfordres for at standse Vandets Løb ved Overfladen, saa behøver den kun at tiltage lidt for at bevirke at $w = 0$; en endnu lidt større Vindhastighed vil da gjøre $\boldsymbol{v} = v_0 = 0$.

Er Vindhastigheden negativt større end den ved (43) bestemte Grændse, saa henhøre Strømningerne til dem af IIden Classe; er derimod Vindhastigheden positivt større end den ved (44) bestemte Grændse, saa svarer Strømningerne til den IIIdie Classe af Tilfælde. I det ved (44) bestemte Tilfælde er Vindhastigheden, som det vil erindres, lig Vandspeilshastigheden, der tillige er den største Strømhastighed, hvormed noget Element af Strømmen bevæger sig. Under Betingelsen (44) er altsaa

$\boldsymbol{v} = v_1 = 118{,}7 \sqrt{\frac{h}{l} H}$; da dernæst $w = \frac{3\boldsymbol{v} + 2v_0}{5}$, og $v_0 = 0{,}774\, \boldsymbol{v}$ følger let, at

$$w = 0{,}9096\, \boldsymbol{v} = 108 \sqrt{\frac{h}{l} H} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

Naar denne Formel, som fremstiller Middelhastigheden af en Havstrøm, der upaavirket af Vinden løber hen over Havbunden, sammenlignes med den almindelige Formel, hvorefter man sædvanligt beregner Hastigheden af en Vandstrøm, som løber hen over en plan Ledning med constant Hastighed, saa sees det, at de næsten ere identiske. Den almindelige Formel for Bevægelsen hen over en plan Flade af et hvilketsomhelst Fluidum, hvis Tæthed i Forhold til Vand er $\rho$, kan nemlig med de brugte Betegnelser erfaringsmæssigt fremstilles saaledes:

$$\frac{h}{l} = 0{,}000086 \cdot \rho \frac{1}{H} \cdot w^2,$$

hvoraf man for $\rho = 1$ finder

$$w = 108\sqrt{\frac{h}{l} H}.$$

Betragte vi dernæst Formlerne (32) og (33), der for Strømme af Iste Classe tjene til Bestemmelsen af Hastighederne $\mathfrak{v}$, $v_0$ og $v_1$ som Functioner af Vandspeilsfaldet, Vanddybden og Vindstyrken, saa finde vi, naar vi indføre Værdierne:

$$b = 0{,}01051, \quad \frac{1+b}{b} = 96{,}108, \quad \frac{1+c}{c} = 4{,}424, \quad \left[\left(\frac{1+b}{b}\right)^2 + \left(\frac{1+c}{c}\right)^2\right] = 9256{,}319,$$

$$a^2 = 720 \cdot \frac{h}{l} H \text{ og } b\left[\left(\frac{1+b}{b}\right)^2 + \left(\frac{1+c}{c}\right)^2\right] = 97{,}284,$$

at Formlen (33) kan skrives:

$$97{,}284\,(V - v_1) = 96{,}108\,V - 4{,}424 \cdot \sqrt{(2581{,}58)^2 \cdot \frac{h}{l} H - V^2}, \text{ hvoraf}$$

$$v_1 = \frac{1{,}176\,V + 4{,}424\sqrt{(2581{,}58)^2 \cdot \frac{h}{l} H - V^2}}{97{,}284} \quad \ldots\ldots\ldots (46)$$

Af denne Ligning i Forbindelse med den sidste af Formlerne (32) følger:

$$\mathfrak{v} = \frac{0{,}166\,V + 4{,}470 \cdot \sqrt{(2581{,}58)^2 \cdot \frac{h}{l} H - V^2}}{97{,}284} \quad \ldots\ldots\ldots (47)$$

og endelig, af den anden Formel (32):

$$v_0 = 0{,}774 \cdot \mathfrak{v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (48)$$

Efter saaledes at have fremstillet de numeriske Formler til Bestemmelsen af Havets Strømningshastighed for det Tilfælde, hvor Vandbevægelsen henhører under Strømninger af Iste Classe, ville vi dernæst søge de tilsvarende Formler for Strømninger af IIden Classe.

Betragte vi de dertil svarende Formler (34), (35) og (36), og sætte vi for Kortheds Skyld

$$c \cdot v_0 = 0{,}29206 \cdot v_0 = u,$$

saa kan Formlen (36) skrives:

$$-c \cdot V + u = c \cdot \frac{96{,}108\,(u^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} + u^3}{u^2 + a^2}.$$

Men da $u^3$ stedse er meget lille imod $96{,}108\,(u^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}$, kan Ligningen med en stor Grad af Tilnærmelse skrives:

$$-0{,}29206 \cdot V + u = 28{,}07 \cdot \sqrt{u^2 + a^2}.$$

Opløses denne Ligning med Hensyn til $u$ og bemærkes derved at $u$ er negativ for alle mulige Værdier af $V$, saa finde vi

$$u = -0{,}00037 \,.\, V - \sqrt{0{,}0001085 \,.\, V^2 - 720{,}91 \,.\, \frac{h}{l} H}$$

og deraf Hastigheden:

$$v_0 = -0{,}00125 \,.\, V - 0{,}0357 \sqrt{V^2 - 6644372 \,.\, \frac{h}{l} H} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

Naar $v_0$ er bestemt af denne Formel, findes først $\mathfrak{v}$ af Formlen (35) og derefter $v_1$ af den anden Formel (34) saaledes:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{v} &= v_0 - \frac{(0{,}292 \,.\, v_0)^3}{(0{,}292 \,.\, v_0)^2 + 720 \,.\, \frac{h}{l} H} \\ v_1 &= \frac{\mathfrak{v} + 0{,}01051 \,.\, V}{1{,}01051} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

Ved Hjælp af de saaledes bestemte Størrelser $v_0$, $\mathfrak{v}$ og $v_1$ lade Strømforholdene af II[den] Classe sig udlede ifølge Formlerne (14) til (22).

For endelig paa lignende Maade at kunne bestemme Strømforholdene af III[die] Classe ved Hjælp af Formlerne (23) til (30), staaer der nu kun tilbage at angive de numeriske Formler til Beregning af Strømhastighederne $v_0$, $\mathfrak{v}$ og $v_1$ for denne Classe af Tilfælde.

Til den Hensigt bemærkes først at, da $\frac{a}{b} = \frac{26{,}833}{0{,}01051} \,.\, \frac{h}{l} H = 2553 \,.\, \frac{h}{l} H$, kan Formlen (38) skrives:

$$v_1 = \frac{0{,}0465 \left[ (V - v_1)^2 + (2553)^2 \frac{h}{l} H \right]^{\frac{3}{2}} - 0{,}01051 \,.\, (V - v_1)^3}{(V - v_1)^2 + (2553)^2 \frac{h}{l} H} \quad \ldots\ldots \quad (51)$$

Naar $v_1$ er bestemt af denne Ligning, findes $v_0$ og $\mathfrak{v}$ henholdsviis af den 1ste og 2den Ligning (37) saaledes:

$$\left.\begin{aligned} v_0 &= 0{,}036 \sqrt{(V - v_1)^2 + (2553)^2 \,.\, \frac{h}{l} H} \\ \mathfrak{v} &= 0{,}0465 \sqrt{(V - v_1)^2 + (2553)^2 \,.\, \frac{h}{l} H} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (52)$$

I de Tilfælde, hvor $v_1$ kun er lille imod $V$, hvad meget hyppigt finder Sted, kunne Formlerne (51) og (52) tilnærmelsesviis skrives:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \frac{0{,}0465\sqrt{\left(V^2 + (2553)^2 \frac{h}{l} H\right)^3} - 0{,}01051 \, . \, V^3}{V^2 + (2553)^2 \frac{h}{l} H} \\ v_0 &= 0{,}036\sqrt{V^2 + (2553)^2 \frac{h}{l} H}, \quad \boldsymbol{v} = 0{,}0465\sqrt{V^2 + (2553)^2 \frac{h}{l} H} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (53)$$

Hermed maa den stillede Opgave: At bestemme de Strømninger i Havet, som fremkaldes ved Vindens Kraft, betragtes som løst, og dette endog paa en fuldkomnere Maade end jeg oprindelig havde Syn for. Det er nemlig indlysende af hvad jeg i det Foregaaende har udviklet, at saasnart blot Havets Dybde $H$, dets Vandspejlsfald $\frac{h}{l}$, samt Vindhastigheden $V$ ere bekjendte, kan man ikke alene ved Hjælp af Formlerne (43) og (44) afgjøre til hvilken Classe af Strømningsforhold de stedfindende Vandbevægelser henhøre, men tillige ved Hjælp af de øvrige udviklede Formler nøiagtigt bestemme Strømhastigheden, saavel i Havets Overflade, som i en hvilkensomhelst Dybde derunder, tillige med Havstrømmens Middelhastighed og dens Vandføring.

Driver Vindens Kraft Havet op mod Land og holder den Vandet opstemmet derimod til en bestemt Høide, saa kan man ved Hjælp af Formlen (42) bestemme Vindens Hastighed eller Styrke, og kjende vi omvendt Vindens Kraft, Havets Dybde og Udstrækning, saa kunne vi ved Hjælp af denne Formel angive, til hvilken Høide Vinden ved en given Vindstyrke vil kunne opstemme Vandet imod Landet.

Det var med Udsigten til den Mulighed, ved Hjælp af Erfaringerne fra Stormfloden af 13de Novbr. 1872, at blive sat i Stand til, for ethvert Punkt af vore Kyster forud at bestemme, hvilket Værn vi bør tilveiebringe for at sikkre Landet mod Oversvømmelser af fremtidige Stormfloder, som bragte mig paa Tanken om at samle de Kjendsgjerninger, som det nævnte Naturfænomen har bragt for Dagen, og det er mig en stor Tilfredsstillelse i denne Afhandling at have kunnet paavise, at Opgaven kan løses paa en ret tilfredsstillende Maade.

Jeg har allerede paaviist at den fremstillede Theori er i fuld Overeensstemmelse med de bekjendte Love for Fluiders Bevægelse i almindelige Ledninger, og jeg vil i en følgende Afhandling faae Lejlighed til at paavise, hvorledes den ogsaa finder Bekræftelse ved de mange forskjellige Naturphænomener, som Stormen den 13de November 1872 fremkaldte i Havet.